1- Öncelikle verilen $z=xy$ denklemini

$$f(x,y,z) = xy - z = 0$$

kapalı formda yazalım. Buradan, f-nin gradient vektör alanı;

$\vec{\nabla} f = (y, x, -1)$ seklindedir. Her $P=(p_1,p_2,p_3)\in E^3$ noktası için

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f\big|_P &= (y, x, -1)\big|_P \\ &= (y(P), x(P), -1) \\ &= (p_2, p_1, -1) \neq (0,0,0) \end{aligned}$$

olduğundan $z=xy$ eşitliği ile verilen ifade E^3 de bir yüzey belirtir.

2- $z=(x-y)(x+y)$ denklemini ; t reel sayılar cisminde degişen bir eleman olmak üzere

$$\begin{aligned} x-y &= t \qquad & & x-y-t=0 \\ x+y &= \frac{1}{t} z \qquad & \text{veya} \qquad & x+y-\frac{1}{t}z=0 \end{aligned}$$

eşitlikleriyle belli olan düzlem aileleriyle ifade edelim. Şimdi bu ailelerin her $t\in\mathbb{R}$ elemanı için arakesiti olan 1-parametreli doğru ailesini bulalım:

$y=\lambda$ dersek,

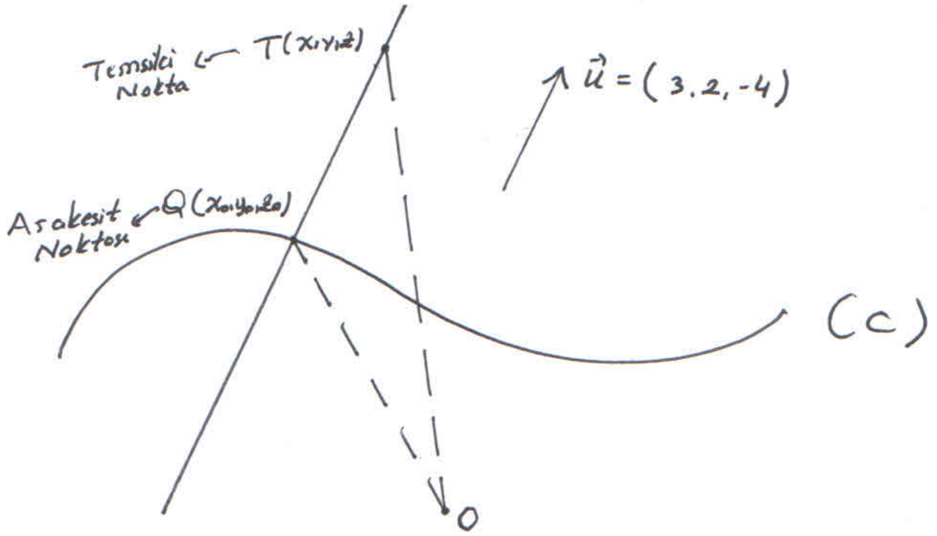
$x=\lambda+t$

$z=t^2+2\lambda t$ bulunur veya

$$\frac{x-t}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-t^2}{2t} = \lambda \text{ yazılır.}$$

Bu son ifade, $(t,0,t^2)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{a}(t)=(1,1,2t)$ olan bir doğru ailesidir. Diğer taraftan, bu doğru ailelerinin birleşimi olan yüzey; dayanak eğrisi $\alpha(t)=(t,0,t^2)$ ve doğrultman vektörü $\vec{a}(t)=(1,1,2t)$ olan bir regle yüzeydir.

3-



Afin aksiyomları gereğince;

$$\vec{OT}=\vec{OQ}+\lambda\vec{u}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(3,2,-4) \text{ veya}$$

$$\begin{cases} x=x_0+3\lambda \\ y=y_0+2\lambda \\ z=z_0-4\lambda \end{cases} \quad \dots(1)$$

elde edilir. Yine, $Q\in(c)$ olduğundan

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=4 \\ x_0^2=1 \end{cases} \quad \dots(2)$$

dir. Ayrıca, (1) sisteminden elde edilen

$$\begin{cases} x_0=x-3\lambda \\ y_0=y-2\lambda \\ z_0=z+4\lambda \end{cases}$$

eşitlikleri (2) de yerine yazarak $\lambda=\frac{x-1}{3}$ olmak üzere

$$\Rightarrow (3y-2x+2)^2+(3z+4x-4)^2=27$$

silindir denklemi elde edilir.

4- M, E^n de bir hiperyüzey olsun. $\alpha : I \xrightarrow{dif.} M$ eğri olsun. N, M nin birim normal vektör alanı olmak üzere α eğrisi her $t \in I$ için

$$\alpha''(t) = \lambda(t) N|_{\alpha(t)}$$

diferansiyel denklemini sağlıyorsa, α-ya M yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri denir.

ÖRNEK : $M = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0\}$ düzlemi üzerindeki doğrular geodezik eğrilerdir.

5- M, E^n de bir hiperyüzey ve $\alpha : I \to M$ bir geodezik eğri olsun. Gösterilmesi gereken

$$\|\alpha'(t)\| = \text{sabit} \quad \text{veya} \quad \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \text{sabit dir.}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle$$

$$= 2\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle$$

$\downarrow$ α - geodezik eğri olduğundan

$$= 2\lambda(t) \langle N|_{\alpha(t)}, \alpha'(t) \rangle$$

$\downarrow \begin{cases} \alpha'(t) \in T_M(\alpha(t)) \\ N|_{\alpha(t)} \in T_M^{\perp}(\alpha(t)) \end{cases}$

$$= 0 \quad \text{bulunur.}$$

$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \text{sabit}$ olduğu görülür.

6- $S = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ olmak üzere, $P = (0, 1, 0)$ için

$$S(P) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\Big|_P = \begin{pmatrix} x(P) & 0 \\ 0 & y(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ dır. Burada,

Ortalama Eğrilik: $H(P) = \frac{1}{2} \, \text{iz} S(P) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Gauss Eğriliği : $K(P) = \det S(P) = 0$ bulunur.